

# 并联 BUCK 变换器中的混沌研究

吴俊娟, 鄢伟扬, 孙孝峰

(燕山大学电气工程学院, 河北省 秦皇岛市 066004)

## STUDY OF CHAOS IN PARALLEL-CONNECTED BUCK CONVERTERS

WU Jun-juan, WU Wei-yang, SUN Xiao-feng

(College of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, Hebei Province, China)

**ABSTRACT:** A switched-mode DC/DC converter is a high non-linear control system. Under certain conditions, various kinds of bifurcation and chaos will appear in the converter. In this paper parallel-connected Buck converter under master-slave control has been studied. The paper not only has deduced in detail the dynamical equation of the objective, but also obtained bifurcation and chaos phenomenon through changed parameters. In order to account for the presence of bifurcation and chaos in theory, an analysis of the stability of their fixed point has been done by reference to the Jacobian Matrix method in nonlinear dynamics, the reason is found out through the Loci of eigenvalues of the Jacobian Matrix.

**KEY WORDS:** Power electronics; Parallel-connected converters; Nonlinearity; Bifurcation; Chaos; Jacobian matrix

**摘要:** 开关式 DC/DC 变换器是一个强的非线性控制系统, 变换器满足一定条件时, 就会产生各种类型的分叉和混沌。该文采用基于主从控制的并联 Buck 变换器为研究对象, 详细推导了并联 Buck 变换器的动力学方程, 通过仿真得到了在一定范围内改变参数时引起的分叉和混沌现象。并且借鉴非线性动力学中的 Jacobian 矩阵法对系统不动点的稳定性进行了分析, 通过其特征值轨迹形象说明了分叉出现的原因。

**关键词:** 电力电子; 并联变换器; 非线性; 分叉; 混沌; Jacobian 矩阵

## 1 引言

20 世纪 80 年代末, 文献[1]首先报道了关于电力电子电路中出现的分叉和混沌现象。1990 年, Krein

和 Bass 提出了实验中观察到的电力电子电路中的“有界”、“震颤”、及“混沌”现象。这些早期的文献没有给出严格的理论分析, 但是它指出了研究电力电子中复杂行为的重要性。从那时开始, 更多的注意力被放在了电力电子电路中观察到的复杂现象上。同年, Hamill 等人 IEE 的电力电子专家会议上, 首先提出了对工作在连续运行模式的 Buck 电路的混沌现象的研究<sup>[2]</sup>。1991 年, 这个研究小组又发表了电流控制型的 Boost 变换器的迭代映射一文, 分析了如何识别分叉与电路结构稳定性的方法。此后, 一批电力电子及电路与系统的工作者逐渐开始致力于研究与识别分叉类型与奇怪吸引子的工作。

1994 年, Tse 指出了工作在断续运行模式下的简单 DC/DC 变换器中的倍周期分叉<sup>[3]</sup>; Chan 和 Tse 进行了关于断续模式的 DC/DC 变换器倍周期分叉出现条件的正式的理论研究<sup>[4]</sup>; 1995 年, Chakrabarty 对 Buck 变换器的分叉行为作了进一步研究<sup>[5]</sup>; 1996 年, Fossas 和 Olivar 详细描述了 Buck 变换器的动态特性, 确认了混沌吸引子的拓扑结构, 研究了与不同的系统演化相关的区域。

电流模式控制下的 DC/DC 变换器的分叉行为也被很多科学工作者研究过。Deane 首先讨论了电流模式下 Boost 变换器通往混沌的道路; Chan 和 Tse 研究了各种类型的混沌路径, 以及这些路径对分叉参数选择的依赖性<sup>[6]</sup>; 1995 年, 分叉现象的研究被拓展到了 4 阶的 Cuk 电路。

在某些分叉行为中, 经常能观察到从周期行为到混沌的突然跳跃, 这个转换是不能用标准的分叉如倍周期和鞍结分叉来解释的。实际上, 正如 Di Bernardo 在<sup>[7]</sup>中提到的, 这种转变是由一类仅仅出现在开关动态系统中的被称之为“边界碰撞”的分叉

基金项目: 国家自然科学基金基金项目(50237020)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (50237020) .

行为所致。同时,周期跳跃(高频开关状态下)和多脉冲的出现可以根据所谓的“滑动解”来进行解释。

如果系统没有固定的开关周期,有人称之为“自由跑”状态。实际上在没有固定周期的集成控制电路之前,这类“自由跑”的变换器是相当普遍的。一个具有代表性的例子就是在Tse的文<sup>[8]</sup>中提到的Cuk电路,这个处于“自由跑”状态的Cuk电路展示了Hopf分叉和混沌现象。另外一个例子是由Magauer和Banerjee给出的能够产生鞍结分叉的公差带控制(滞环控制)变换器<sup>[9]</sup>。

目前国内对于发生在DC/DC变换器中的分叉和混沌也进行了一定的研究<sup>[10-13]</sup>。纵观国内外的研究现状,拓扑更加复杂,维数更高的变换器必将成为研究热点。故本文以并联型开关变换器<sup>[14]</sup>为研究目标,对发生在并联Buck变换器中的分叉和混沌现象进行研究。

## 2 基于主从控制的并联 Buck 变换器模型分析

### 2.1 并联 Buck 变换器主电路模型分析

人们在实用中往往采用模块化结构的构造方法,采用一定规格系列的模块化电源,按照一定的串联或并联方式,分别达到输出电压、输出电流、输出功率扩展的目的<sup>[15-16]</sup>。

图1所示即为并联型Buck变换器的原理图。对其中的一个单个Buck变换器来说是由一个开关、一个电感和一个二极管组成,属于二维电路。当两个Buck电路并联的时候就变成了三维电路。如果变换器工作在电流连续状态,那么并联电路中的二极管 $D_i$ 和开关 $S_i$ 就总是工作在互补状态( $i=1,2$ )。也就是说,当 $D_i$ 导通时, $S_i$ 就关断。相反情况同时成立。因此在每个开关周期,只有四种可能的开关状态:①  $S_1$ 、 $S_2$ 同时导通;②  $S_1$ 导通, $S_2$ 关断;③  $S_1$ 关断, $S_2$ 导通;④  $S_1$ 、 $S_2$ 同时关断。相应的状态方程如下所示:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 E & (S_1, S_2 \text{同时导通}) \\ \dot{x} = A_2 x + B_2 E & (S_1 \text{导通}, S_2 \text{关断}) \\ \dot{x} = A_3 x + B_3 E & (S_1 \text{关断}, S_2 \text{导通}) \\ \dot{x} = A_4 x + B_4 E & (S_1, S_2 \text{同时关断}) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $E$  为输入电压;  $x = [v_c \quad i_1 \quad i_2]^T$  是状态变

量。在两个Buck变换器并联情况下可以推导出  $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 =$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{C(R+r_c)} & \frac{R}{C(R+r_c)} & \frac{R}{C(R+r_c)} \\ -\frac{R}{L_1(R+r_c)} & -\frac{1}{L_1} \left( \frac{r_c R}{R+r_c} + r_{L1} \right) & -\frac{1}{L_1} \left( \frac{r_c R}{R+r_c} \right) \\ \frac{R}{L_2(R+r_c)} & \frac{1}{L_2} \left( \frac{r_c R}{R+r_c} \right) & -\frac{1}{L_1} \left( \frac{r_c R}{R+r_c} + r_{L2} \right) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_1 \\ 1/L_2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_2 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

值得注意的是开关状态的顺序:通常情况下,假定按上式表示的顺序进行开关状态的转换。以 $S_1$ 、 $S_2$ 的同时导通开始, $S_1$ 、 $S_2$ 的同时关断结束。但是中间的两个开关状态( $S_1$ 导通, $S_2$ 关断和 $S_1$ 关断, $S_2$ 导通)并不是同时存在,这要看 $S_1$ 、 $S_2$ 的导通周期。如果 $S_1$ 有一个较大的导通周期,方程组中的第3个方程就被省略。如果 $S_2$ 有较大的导通周期,则第4个方程省略。

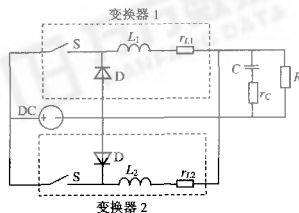


图1 并联型Buck变换器原理图

Fig. 1 Diagram of parallel-connected buck converters

### 2.2 主从控制

本电路采用主从控制<sup>[17]</sup>,如图2所示。主模块负责调节和控制总的输出电压,并负责分配各个模块的工作电流。

对于变换器1,控制电压由电压反馈环得到

$$v_{con1} = V_{offset} - K_{v1}(v - V_{ref}) \quad (4)$$

对于变换器2,在电压反馈环基础上附加了一个电流误差信号

$$v_{con2} = V_{offset} - K_{v2}(v - V_{ref}) - K_i(i_2 - m_i) \quad (5)$$

式中  $V_{offset}$  为稳定导通状态的直流补偿电压;  $V_{ref}$  为参考电压;  $K_{v1}$  为变换器1的电压反馈系数;  $K_{v2}$

为变换器 2 的电压反馈系数;  $K_i$  为变换器 2 的电流反馈系数;  $m$  为分频比。

在主从控制模式下, 变换器 2 的电流始终是从  $m$  到 1 的分频比跟随变换器 1 的电流。当  $m=1$  时, 两个变换器电流相等。其中, 变换器 1 被认为是主模块, 而变换器 2 作为从模块。

并联型 Buck 变换器在一定条件下改变某些参数可以改变系统的输出特性。

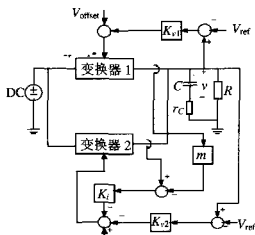


图 2 基于主从控制的并联 Buck 变换器原理图

Fig. 2 Diagram of parallel-connected buck converters under master-slave control

### 3 并联 Buck 变换器分叉和混沌仿真研究

在图 2 所示电路中,  $K_{v1}$ 、 $K_{v2}$ 、 $K_i$ 、 $m$  都可以作为分叉参数。建立仿真模型, 并根据文献[18]选取主电路参数:  $T=400\mu\text{s}$ ;  $E=48\text{V}$ ;  $L_1=0.02\text{H}$ ;  $r_{L1}=0.05\Omega$ ;  $r_{L2}=0.2\Omega$ ;  $L_2=0.04\text{H}$ ;  $C=47\mu\text{F}$ ;  $r_C=0.01\Omega$ ;  $R=10\Omega$ 。

仿真结果如图 3~图 6 所示。图中  $v_o$  为输出电压;  $i_1$ 、 $i_2$  分别为变换器 1 和 2 的电感电流;  $v_{con}$  为控制电压。

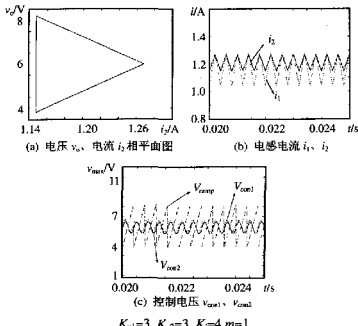


图 3 周期-1 状态典型波形

Fig. 3 Typical waveforms of period-1 state

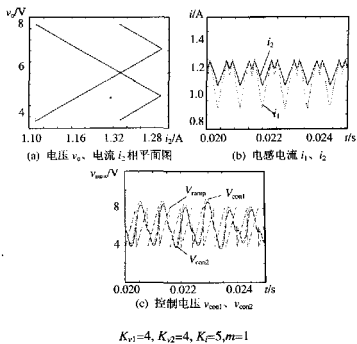


图 4 周期-2 状态典型波形

Fig. 4 Typical waveforms of period-2 state

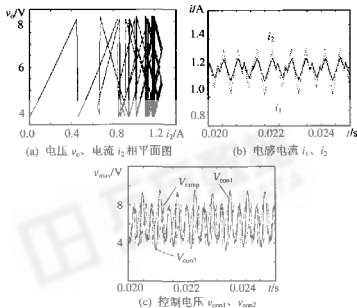


图 5 周期-4 状态典型波形

Fig. 5 Typical waveforms of period-4 state

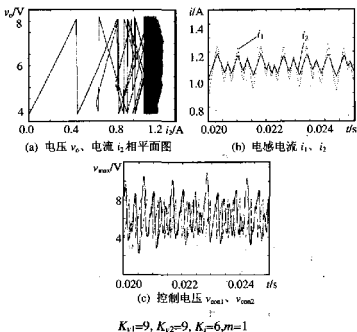


图 6 混沌状态典型波形

Fig. 6 Typical waveforms of chaos state

## 4 理论分析

### 4.1 离散迭代模型

已有的研究表明研究变换器混沌现象最合适的模型是离散模型<sup>[10]</sup>。在已有的研究 DC/DC 变换器分叉和混沌现象动态演化过程, 分叉图、Jacobian 矩阵和 Lyapunov 指数这三种描述方法都是建立在时间离散映射基础上的, 是最常用和最有效的分析工具。

本文将通过 Jacobian 矩阵法<sup>[11]</sup>建立变换器离散映射时间周期不动点的 Jacobian 矩阵来对变换器系统非线性特性进行解析分析。

从并联 Buck 变换器的状态模型中可看出: 对于每一个状态方程, 都可以推导出它的解, 然后通过迭代算法,  $x_{n+1}$  就可以写成用  $x_n, d_{1,n}$  和  $d_{2,n}$  表示的形式

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & \phi[(1-d_{2,n})T]\phi_1[(d_{2,n}-d_{1,n})T] \cdot \\ & \phi(d_{1,n}T)x_n + \phi[(1-d_{2,n})T]\phi_2[(d_{2,n}-d_{1,n})T] \cdot \\ & [\phi(d_{1,n}T)-1]A_1^{-1}B_1E + \phi[(1-d_{2,n})T] \cdot \\ & \{[\phi(d_{2,n}-d_{1,n})T-1]\}A_2^{-1}B_2E + \\ & \{\phi[(1-d_{2,n})T]-1\}A_4^{-1}B \end{aligned} \quad (6)$$

式中  $\phi(\zeta)$  为对应于  $A_j$  的转移矩阵, 而且有

$$\phi(\zeta) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_j^n \zeta^n, \quad j=1,2,3,4 \quad (7)$$

在并联 Buck 变换器中, 令

$$A = A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

而且  $\phi(\zeta) = \phi(\zeta) = \phi(\zeta) = \phi(\zeta) = \phi(\zeta)$

则上式离散方程可重写为

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & \phi(T)x_n + \phi(T)A^{-1}B_1E + \phi[(1-d_{1,n})T]^{-1} \cdot \\ & (B_3 - B_1)E + \phi[(1-d_{2,n})T]A^{-1} \cdot \\ & (B_4 - B_3)E - A^{-1}B_2E \end{aligned} \quad (8)$$

接下来就是要寻找导通比和状态变量之间的关系, 控制电压  $v_{con1}, v_{con2}$  的表达式已经在前面的式(4)和(5)中给出, 又可重新写为下列形式:

$$\begin{cases} v_{con1} = U_1 + k_1^T x \\ v_{con2} = U_2 + k_2^T x \end{cases} \quad (9)$$

式中  $U_1, U_2$  为常量; 反馈系数  $k_1, k_2$  为  $k_1^T = [-K_{v1}, 0, 0], k_2^T = [-K_{v2}, K_m, -K_i]$

同时三角波可表示为

$$v_{ramp} = \alpha + \beta(t \bmod T) \quad (10)$$

为了得到占空比的值, 知道在  $v_{con1} = v_{ramp}, v_{con2} = v_{ramp}$  时开关  $S_1$  和  $S_2$  发生跳变。

由此可定义

$$\begin{aligned} s_1(x_n, d_{1,n}) = & v_{con1} - v_{ramp} = U_1 + k_1^T x(d_{1,n}T) - \\ & (\alpha + \beta d_{1,n}T) = U_1 + k_1^T \{\phi(d_{1,n}T)x_n + \\ & [\phi(d_{1,n}T)-1]A^{-1}B_1E\} - (\alpha + \beta d_{1,n}T) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} s_2(x_n, d_{1,n}, d_{2,n}) = & v_{con1} - v_{ramp} = U_2 + \\ & k_2^T x(d_{2,n}T) - (\alpha + \beta d_{2,n}T) = U_2 + \\ & k_2^T \{\phi(d_{2,n}T)x_n + \phi(d_{2,n}T)A^{-1}B_2E + \\ & \phi(d_{2,n}-d_{1,n})T\}A^{-1}(B_3 - B_1)E - \\ & A^{-1}B_3E\} - (\alpha + \beta d_{2,n}T) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{当} \begin{cases} s_1(x_n, d_{1,n}) = 0 \\ s_2(x_n, d_{1,n}, d_{2,n}) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

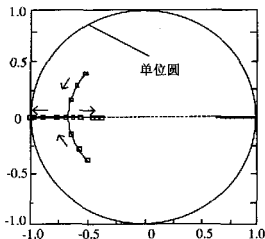
时, 开关状态改变, 求解方程可得到  $d_{1,n}, d_{2,n}$ 。将计算得到的结果代入到式(8)便可得到闭环系统的离散迭代映射。

### 4.2 雅可比矩阵的推倒

假设系统的平衡点为  $X_Q = x_{n+1}$ , 则离散迭代映射方程的雅可比矩阵为

$$\begin{aligned} J(x_Q) = & \frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{\partial f}{\partial d_{1,n}} \left( \frac{\partial s_1}{\partial d_{1,n}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial s_1}{\partial x_n} \right) - \frac{\partial f}{\partial d_{2,n}} \left( \frac{\partial s_2}{\partial d_{2,n}} \right)^{-1} \\ & \left[ \left( \frac{\partial s_2}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial s_2}{\partial d_{1,n}} \left( \frac{\partial s_1}{\partial d_{1,n}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial s_1}{\partial d_{1,n}} \right) \right]_{x_n=x_Q} \end{aligned} \quad (14)$$

其特征值方程为  $\det[\lambda I - J(x_Q)] = 0$ , 保持  $m=1, K_i=5$  不变, 分别改变  $K_{v1}, K_{v2}$  利用数值方法可以描绘出该特征多项式的根轨迹, 即雅可比矩阵特征值的变化情况, 如图7所示(图中箭头方向表示  $K_{v1}$  和  $K_{v2}$  增大方向)。当雅可比矩阵具有一个特



(a)  $K_{v1}$  增大时的特征值轨迹

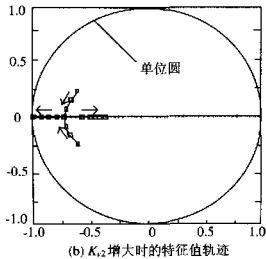


图 7  $K_{v1}, K_{v2}$  增大时的特征值轨迹  
Fig. 7 Loci of eigenvalues as  $K_{v1}, K_{v2}$  varies

征值为-1, 而其余特征值的模均小于 1(即在复平面的单位圆内), 则说明系统发生了倍周期分叉。

## 5 结论

利用 MATLAB 仿真可以清晰地显示出随着参数变化并联型 Buck 变换器逐渐由稳定状态走向混沌的工作过程。研究表明, 改变  $K_{v1}$ 、 $K_{v2}$ 、 $K_i$ 、 $m$  等系统参数, 变换器 1 和变换器 2 的电感电流经由周期 1, 周期 2, 周期 4 等周期及准周期状态, 最终进入混沌。对于系统来说, 最初有一个稳定的不动点, 取而代之的是两个周期 2 不动点, 随着分叉参数的继续增加系统又出现周期 4 不动点、周期 8 不动点..., 直到系统进入混沌状态。根据 Jacobian 矩阵法我们利用并联型 Buck 变换器的离散迭代模型, 改变其分叉参数, 系统特征值也随之发生变化, 该变化过程详细描述了系统由稳定状态走向分叉的道路, 从而从理论上验证了模型仿真的正确性。

## 参考文献

- [1] Hamill D C, Jefferies D J. Subharmonics and chaos in a controlled switched-mode power converter[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 1988, 35(8): 1059-1061.
- [2] Hamill D C, Deane J B, Jefferies D J. Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings[J]. IEEE Trans. on Power Electron, 1992, 7(1): 25-36.
- [3] Tse C K. Flip Bifurcation and chaos in a three-state boost switching regulator[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 1994, 42(1): 16-23.
- [4] Chan W C Y, Tse C K. On the form of control function that can lead to chaos in discontinuous-mode DC-DC converters[C]. IEEE Power Electronics Specialist Conference. Saint Louis, USA, 1997: 1317-1322.
- [5] Chakrabarty K, Podder G, Banerjee S. Bifurcation behavior of the buck converter[J]. IEEE Trans. Power Electron., 1995, 11(3): 439-447.
- [6] Chan W C Y, Tse C K. Study of bifurcation in current-programmed

- boost DC-DC converters: from quasi-periodicity to period doubling[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 1997, 44(12): 1129-1142.
- [7] Bernardo M Di, Garofalo F, Glielmo L *et al.* Switchings, bifurcations and chaos in DC-DC converters[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 1998, 45(2): 133-141.
- [8] Tse C K, Lai Y M, Lu H H C. Hopf bifurcation and chaos in a free-running current-controlled cuk switching regulator[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 2000, 47(4): 448-457.
- [9] Magauer A, Banerjee S. Bifurcations and chaos in the tolerance band pwm technique[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 1990, 37(3): 399-409.
- [10] 张波, 曲颖. Buck DC/DC 变换器分叉和混沌的精确离散模型及实验研究[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(12): 99-103. Zhang Bo, Qu Ying. Study of the experiment and the precise discrete model of bifurcation and chaos for Buck DC/DC converter [J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(12): 99-103.
- [11] 张波, 李萍, 齐群. DC-DC 变换器分叉和混沌现象的建模和分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(11): 81-86. Zhang Bo, Li Ping, Qi Qun. Methods for analyzing and modeling bifurcations and chaos in DC/DC converters[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(11): 81-86.
- [12] 张波, 齐群. PWM BUCK 变换器不同工作方式下的次谐波和混沌行为[J]. 中国电机工程学报, 2002, 22(10): 18-21. Zhang Bo, Qi Qun. Subharmonics and chaos of PWM BUCK converter in different operation modes[J]. Proceedings of the CSEE, 2002, 22(10): 18-21.
- [13] 马西奎, 刘伟增, 张洁. 快时标意义下 Boost PFC 变换器中的分叉和混沌现象分析[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(5): 61-67. Ma Xikui, Liu Weizeng, Zhang Hao. Analysis of fast-scale bifurcations and chaos phenomena in Boost PFC converters[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(5): 61-67.
- [14] Lu H H C, Tse C K. Instability and bifurcation in parallel-connected buck converters under a master-slave current-sharing scheme [C]. IEEE Power Electronics Specialists Conference. Galway Ireland, 2000.
- [15] Thottuvelli V J, Verghese G C. Analysis and control of paralleled DC/DC converters with current sharing[J]. IEEE Trans. on Power Electron. July 1998, 13(7): 635-644.
- [16] Panov V, Rajagopalan J, Lee F C. Analysis and design of n paralleled DC-DC converters with master-slave current-sharing control [C]. IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition, Atlanta, USA, 1997.
- [17] 刑若, 严仰光. 电流型调节逆变器的冗余并联控制方法[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(11): 199-204.
- [18] Xing Yan, Yan Yang-guang. Control for current regulated inverters in redundant parallel operation[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(11): 199-204.
- [18] Lu H H C, Tse C K. Bifurcation behavior in parallel-connected buck converters[J]. IEEE Trans. on Circuits and Systems-I, 2001, 48(2): 233-240.

收稿日期: 2005-05-04.

作者简介:

吴俊娟(1979-), 女, 硕士, 研究方向为功率变换器中的非线性; 邹伟扬(1940-), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为高频功率变换。